A one-dimensional Stefan problem for the heat equation with a nonlinear boundary condition

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
新屋健勝 (Kensho ARAYA) *

Abstract

自由境界問題の一種である Stefan 問題は, 水から氷, あるいは氷から水への相転移のモデルである. このモデルは Stefan-Boltzmann の法則でも知られている J. Stefan によって, 19 世紀後半に考案されたようである. 本講演では非線形境界条件付きの 1 次元熱方程式に対する 1 相の Stefan 問題について考察する. まず, この Stefan 問題の解を 3 つのタイプに分類する: 指数減衰する時間大域解, 高々多項式程度の減衰をする時間大域解, 有限時間で爆発する解の 3 つである. これらの分類は初期値の大きさによって決まることを示す. さらに, 爆発時刻における解の挙動や自由境界の発散レートについての結果も紹介する.

1　導入

1.1　Stefan 条件の導出

まず, Stefan 条件を導出する. $\mathbb{R}^3$ 内の x 軸に平行な柱状領域の $x < s(t)$ の部分に水が, $x > s(t)$ の部分に氷が分布しているとする. ただし, $x = s(t)$ は水と氷の境界面である. また, 柱状領域の断面を $D := D(t)$, 氷や水の温度は x 座標のみに依存しているとして $u(t, x)$ とおく.

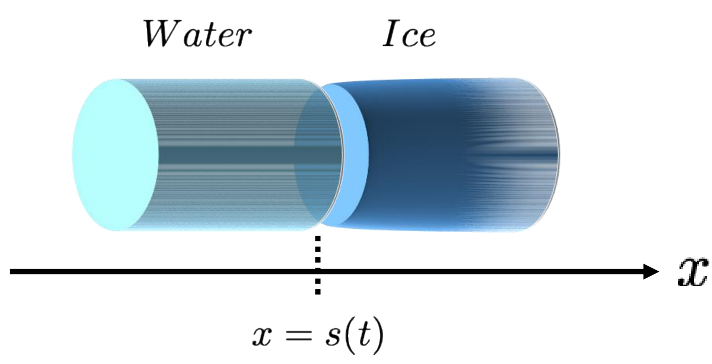

Figure 1: 相転移モデル

*kensho@ms.u-tokyo.ac.jp
1.1, 1.2 節 は Daniele Andreucci の Lecture notes on the Stefan problem に大きくよる.

このとき, Fourier の法則から, 熱流束は水の領域と氷の領域でそれぞれ $-k_w u_x(t,x), -k_i u_x(t,x)$ となる. ここで, k_w, k_i はそれぞれ, 水, 氷の拡散係数である. 時刻 t から $t+h$ までの間に消費した熱量は,

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+h}\int_{D(t)} \{-k_w u_x(t,s(t)-)\cdot \boldsymbol{e}_x - k_i u_x(t,s(t)+)\cdot(-\boldsymbol{e}_x)\}\,dt\,dy\,dz \\
&= |D|\int_t^{t+h}\{-k_w u_x(t,s(t)-) + k_i u_x(t,s(t)+)\}\,dt
\end{aligned} \tag{a}$$

と近似できる. また, この間の相転移で消費した熱量は, 氷の単位体積あたりの潜熱を L とすると, $|D|L\{s(t+h)-s(t)\}$ である. この量が $h << 1$ において (a) と等しいとすると

$$\int_t^{t+h}\{-k_w u_x(t,s(t)-) + k_i u_x(t,s(t)+)\}\,dt = L\{s(t+h)-s(t)\}$$

が成り立つと考えられる. この式の両辺を h で割って $h \to 0$ として極限をとると

$$-k_w u_x(t,s(t)-) + k_i u_x(t,s(t)+) = Ls'(t)$$

が得られる. この条件は **Stefan 条件** と呼ばれ, 自由境界の移動速度に関する拘束条件であり, 相転移におけるエネルギー保存則を反映している. Stefan 問題とは Stefan 条件を課した自由境界問題である. Stefan 問題において未知関数は 2 つあり, 自由境界 s と温度関数 u である. これらを同時に求めなければならないことが Stefan 問題特有の困難な点である.

水の領域と氷の領域の温度が共に非自明な場合は 2 相問題と呼ばれる. 一方で $u=0$ on $x>s(t)$ とすると, 温度変化は $x<s(t)$ の部分のみ考えれば良いことになる. この場合は 1 相問題と呼ばれる. 以下では全て 1 相問題のみ扱う.

1.2 Stefan 問題の基本的な性質

次の熱方程式に対する Stefan 問題を考えてみる:

$$\begin{cases}
u_t - u_{xx} = 0 & \text{for}\quad 0<t<T,\quad 0<x<s(t), \\
u(t,s(t)) = 0 & \text{for}\quad 0<t<T, \\
s'(t) = -u_x(t,s(t)) & \text{for}\quad 0<t<T.
\end{cases} \tag{S}$$

今の段階で初期条件や $x=0$ における境界条件などは詳細に設定しないでおく. まず, いくつかの解の例を紹介する.

Example 1.1. $\alpha, C>0$ を 1 つずつ固定する. このとき,

$$s(t) = 2\alpha\sqrt{t}$$
$$u(t,x) = C\left\{\mathrm{erf}\alpha - \mathrm{erf}\left(\tfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}$$

は (S) の解である. ただし,

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}\,dz$$

である.

Example 1.2.

$$s(t) = t$$
$$u(t,x) = e^{t-x} - 1$$

は (S) の解である.

このように具体的に書ける解を紹介したが, 一般的に Stefan 問題の解を具体的に書くのは困難である. また, Stefan 問題は非線形であることにも注意する. 実際に (S) の解の定数倍や, 2 つの解の和が (S) の解になっていないことが容易にわかる.

その他にも, (S) には (境界条件や初期条件に適当な条件を課した上で) 以下のような基本的な性質が成り立つ:

- 古典解 (s,u) の存在, 一意性, 正則性,
- 比較原理,
- 初期値が正値のときの $s(t)$ の狭義単調増加性 (Hopf's Lemma より従う).

1.3 先行研究

前節で熱方程式に対する Stefan 問題について紹介した. 次に, 半線形熱方程式に対する Stefan 問題を紹介する. 先行研究 [6], [8], [13] では以下の Stefan 問題が研究された:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u^p & \text{for} \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < s(t), \\ -u_x(t,0) = 0 & \text{for} \quad 0 < t < T, \\ u(t,s(t)) = 0 & \text{for} \quad 0 < t < T, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad s(0) = s_0 & \text{for} \quad 0 < x < s_0, \\ s'(t) = -u_x(t,s(t)) & \text{for} \quad 0 < t < T. \end{cases} \tag{SP'}$$

(SP') の可解性, 解の正則性, 比較原理, 一意性等については Kenmochi ([9], [10], [11] を参照) や, Fasano, Primicerio らによって研究されている ([5] を参照). (SP') の解の安定性については Aiki, Imai ([4] を参照), Souplet によって研究された ([13] を参照).

また, [8] では Souplet らが問題 (SP') を以下のような観点から研究した.

A 問題 (SP') の解は有限時間で爆発することがあるか? もしあるなら初期値がどのような十分条件をみたせばよいか?

B 問題 (SP') の解は初期値が十分小さければ時間大域的に存在するか?

C 問題 (SP') の時間大域解の漸近挙動はどのようになるか? 特に時間大域解で非有界なものは存在するか?

これらの問題 A, B, C は, (SP') に対応する以下の固定境界問題

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u^p & \text{for} \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < L, \\ u(t,L) = u_x(t,0) = 0 & \text{for} \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{F}$$

の延長として研究されてきた. 問題 A については, 問題 (F) に爆発解が存在することが知られているので, 比較原理により (SP') にも爆発解が存在することがただちにわかる. Aiki

は (SP') の爆発解のプロファイルについて考察した ([2] を参照). Aiki の結果は次の通りである. 初期値が

$$u_{0,x}(x) < 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < s_0$$

および

$$u_{0,xx}(x) + u_0(x)^p \geq 0 \quad \text{for} \quad 0 < x < s_0$$

をみたすとする. この初期値における問題 (SP') の解 (s, u) が爆発時刻 T^* で爆発するとき,

$$\lim_{t \to T^*} u(t, 0) = \infty, \quad \lim_{t \to T^*} s(t) = L < \infty$$

をみたし, かつ, ある $(0, L)$ 上の実数値関数 $M(x)$ が存在し,

$$|u(t, x)| \leq M(x) \quad \text{for} \quad 0 < t < T^*, \quad 0 < x < s(t)$$

であることを示した. すなわち, 解が爆発するとき, 自由境界 s は有限値に収束し, かつ $u(t, x)$ は $x = 0$ においてのみ爆発し, それ以外の x については必ず有界であることを示している. この爆発解の性質は Fujita, Chen によって固定境界の場合に同様の結果が既に得られていた ([7] を参照). Aiki はこの結果を Stefan 問題に応用し, 上の結果を得た. さらに Aiki は (SP') の $x = 0$ の境界条件を Dirichlet 条件にした問題の爆発解についても同様の考察を試みている ([1] を参照).

Souplet らは (SP') の解が爆発するための十分条件を以下のように与えた ([8] を参照). まず, 時刻 t におけるエネルギーを以下で定義する.

$$\tilde{E}(t) = \int_0^{s(t)} \left(\frac{(u_x)^2}{2} - \frac{u^{p+1}}{p+1} \right) (t, x) \, dx$$

(SP') の解の有限時間の爆発について, 初期値 u_0 が

$$E(u_0) = \int_0^{s_0} \left(\frac{(u_{0,x})^2}{2} - \frac{u_0^{p+1}}{p+1} \right) (x) \, dx < \frac{\pi^2}{256} \frac{\|u_0\|_1^3}{(s_0 + \|u_0\|_1)^4}$$

をみたすとき, 解は有限時刻で爆発する. これは Levine によるエネルギー関数の凸性を用いる方法 ([12] を参照) によって示されている.

問題 B, C について, Aiki, Imai は問題 (SP') の解 (s, u) について, 初期値が十分小さければ $\|u(t)\|_\infty$ が 0 に指数減衰することを示した ([3] を参照). Souplet らは $\|u(t)\|_\infty$ が指数減衰するための十分条件を与えた. また, 時間大域解は必ず 0 に一様収束することを示し, 時間大域解で非有界なものは存在しないことが示された. さらに時間大域解を自由境界が発散するか収束するかで分類した ([8] を参照).

ただし, $s(t)$ が $t \to \infty$ で無限大に発散する時の発散レートについては未解決である. 一般に Stefan 問題において $s(t)$ の発散レートを求めるのは非常に難しいようである.

2　主定理

次に, 非線形境界条件付きの一次元熱方程式に対する Stefan 問題

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{for} \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < s(t), \\ -u_x(t,0) = u(t,0)^p & \text{for} \quad 0 < t < T \\ u(t,s(t)) = 0 & \text{for} \quad 0 < t < T, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \quad s(0) = s_0 & \text{for} \quad 0 < x < s_0, \\ s'(t) = -u_x(t,s(t)) & \text{for} \quad 0 < t < T \end{cases} \tag{SP}$$

を考える。ここで, $p > 1$, $s_0 > 0$, $u_0 \in C^1([0,s_0])$, $T \in (0,\infty]$ とする. これは境界 $x = 0$ における発熱反応のモデルとみなせる. (SP') との違いは非線形項が領域の内部ではなく, 領域の境界上にある点である. 対応する固定境界問題

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{for} \quad 0 < t < T, \quad 0 < x, \\ -u_x(t,0) = u(t,0)^p & \text{for} \quad 0 < t < T \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & \text{for} \quad 0 < x, \end{cases}$$

においても, (F) と類似点が多いことが知られており, Stefan 問題においても (SP) の解析に (SP') の手法が有用であることが期待される. 本研究の新規性のひとつは (SP) の解を分類したことである.

主定理を述べる前に解の定義を述べる. 解は古典解の範囲で考える. 厳密に述べると, (s,u) が問題 (SP) の解であるとは, s が区間 $[0,T)$ の C^1-級関数 $s = s(t)$ であり,

$$u \in C^{2;1}(D), \quad u \in C^{1;0}(\partial D), \quad u \in C(\underline{D})$$

かつ (s,u) が $\underline{D}$ 上の各点において問題 (SP) をみたすものとする. ただし, 領域 D, ∂D, $\underline{D}$ は

$$D := \bigcup_{0<t<T} \{t\} \times (0,s(t)), \quad \partial D := \bigcup_{0<t<T} \{t\} \times \{0,s(t)\}, \quad \underline{D} := \bigcup_{0\leq t<T} \{t\} \times [0,s(t)]$$

とする.

主定理の 1 つ目はエネルギー及び爆発時刻における解の挙動に関するものである. この定理は解の分類に重要な役割を担うものである.

Theorem 2.1. 問題 (SP) の解 (s,u) の最大存在時間を T_m とする. エネルギーを

$$E(s(t),u(t)) := \frac{1}{2}\int_0^{s(t)} |\partial_x u(t)|^2 \, dx - \frac{1}{p+1} u(t,0)^{p+1} \quad \textit{for} \quad t \in (0,T_m). \tag{2.1}$$

で定義する.

(1) $T_m = \infty$ のとき, 以下が成り立つ:

$$E(s(t),u(t)) \geq \frac{\pi^2}{256} \frac{\|u(t)\|^3_{L^1(0,s(t))}}{(s(t) + \|u(t)\|_{L^1(0,s(t))})^4} > 0 \quad \textit{for } t \in (0,\infty).$$

(2) $T_m < \infty$ とする．このとき，$\lim_{t \nearrow T_m} u(t,0) = \infty$ *and* $\lim_{t \nearrow T_m} s(t) < \infty$ である．さらに，以下が成り立つ:

$$\sup_{t \in (T_m/2, T_m)} (T_m - t)^{\frac{1}{2(p-1)}} u(t,0) < \infty, \tag{2.2}$$

$$\sup_{t \in (T_m/2, T_m)} \|u(t)\|_{L^\infty(\delta, s(t))} < \infty \quad \text{for any } \delta \in (0, s_0), \tag{2.3}$$

$$\lim_{t \nearrow T_m} E(s(t), u(t)) = -\infty. \tag{2.4}$$

次に解の分類に関する主定理を述べる．解の分類が初期値の大きさによって変化することも主張している．

Theorem 2.2. 任意の $\lambda > 0$ について (s_λ, u_λ) を (SP) の解とし，T_λ をその解の最大存在時間とする．このとき，$\lambda_* \le \lambda^*$ なる λ_*, $\lambda^* \in (0, \infty)$ が存在して，以下を満たす:

(1) 指数減衰する時間大域解:

$0 < \lambda < \lambda_*$ とする．このとき，$T_\lambda = \infty$, $\lim_{t \to \infty} s_\lambda(t) < \infty$ であり，かつ以下が成り立つ:

$$\|u_\lambda(t)\|_{L^\infty(0, s_\lambda(t))} = O(e^{-\alpha t}) \quad \text{as } t \to \infty \text{ for some } \alpha \in (0, \infty).$$

(2) 高々多項式程度の減衰をする時間大域解:

$\lambda_* \le \lambda \le \lambda^*$ とする．このとき，$T_\lambda = \infty$ かつ $\lim_{t \to \infty} s_\lambda(t) = \infty$ である．さらに，以下が成り立つ:

$$\lim_{t \to \infty} \|u_\lambda(t)\|_{L^\infty(0, s_\lambda(t))} = 0, \quad \liminf_{t \to \infty} s_\lambda(t)^{\frac{1}{p-1}} \|u_\lambda(t)\|_{L^\infty(0, s_\lambda(t))} > 0,$$

$$s_\lambda(t) = (1 + o(1)) \int_0^t u_\lambda(\tau, 0)^p \, d\tau = o\left(t^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{as } t \to \infty.$$

特に，

$$\liminf_{t \to \infty} t^{\frac{1}{2(p-1)}} \|u_\lambda(t)\|_{L^\infty((0, s(t))} = \infty. \tag{2.5}$$

である．

(3) 爆発解:

$\lambda > \lambda^*$ とする．このとき，解 (s_λ, u_λ) は爆発する．．すなわち，$T_\lambda < \infty$.

最後に自由境界の発散レートに関する結果を述べる．

Theorem 2.3. 初期値が $u_0 \in C^1(0, s_0)$, 及び $\partial_x u_0 \le 0$ *on* $(0, s_0)$ を満たすとする．このとき，任意の $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$ について，次が成り立つ:

$$\liminf_{t \to \infty} t^{-\frac{p-1}{2p-1}} s_\lambda(t) > 0. \tag{2.6}$$

式 (2.6) は $\partial_x u_0 \le 0$ on $(0, s_0)$ の仮定を外しても成り立つと予想される．また，

$$\limsup_{t \to \infty} t^{-\frac{p-1}{2p-1}} s_\lambda(t) < \infty,$$

も成り立つと予想される．

この自由境界の発散レートは方程式の相似変換から得られるレート $\sqrt{t}$ からずれており，もし正しければ興味深い結果である．部分的にでも自由境界の発散レートに関する結果が得られたことも重要な新規性のひとつである．

証明のポイント

本研究の主定理の証明の最も重要なポイントはスケール変換である．適当な列 $\{(t_n, x_n)\}_n$ について,

$$v_n(\tau, y) = \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} u(t_n + \lambda_n^2 \tau, \lambda_n y)$$

と変換し, $n \to \infty$ として適当な収束部分列 $v_n \to v$ をとる．このとき, v の満たす方程式や不等式から時間大域解の性質や爆発時刻におけるエネルギーの発散などを証明できる．

ただし, 時間大域解が 0 に収束することの証明において安直に (SP') と同様の方法が使えない．これは非線形項が領域内部ではなく, 境界上にあることから発生する困難な点である．本講演では, 列 $\{(t_n, x_n)\}_n$ の取り方を変えたり, 比較原理を組み合わせた手法でこの困難を解決したことを説明する．

References

[1] T. Aiki and H. Imai, *Blow-up points to one phase Stefan problems with Dirichlet boundary conditions*, Modelling and optimization of distributed parameter systems (Warsaw, 1995), Chapman & Hall, New York, 1996, pp. 83–89.

[2] T. Aiki, *Behavior of free boundaries of blow-up solutions to one-phase Stefan problems*, Nonlinear Anal. **26** (1996), 707–723.

[3] T. Aiki and H. Imai, *Global existence of solutions to one-phase Stefan problems for semilinear parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **175** (1998), 327–337.

[4] ______, *Stability of global solutions to one-phase Stefan problem for a semilinear parabolic equation*, Czechoslovak Math. J. **50(125)** (2000), 135–153.

[5] A. Fasano and M. Primicerio, *Free boundary problems for nonlinear parabolic equations with nonlinear free boundary conditions*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 247–273.

[6] M. Fila and P. Souplet, *Existence of global solutions with slow decay and unbounded free boundary for a superlinear Stefan problem*, Interfaces Free Bound. **3** (2001), 337–344.

[7] H. Fujita and Y. G. Chen, *On the set of blow-up points and asymptotic behaviours of blow-up solutions to a semilinear parabolic equation*, Analyse mathématique et applications, Gauthier-Villars, Montrouge, 1988, pp. 181–201.

[8] H. Ghidouche, P. Souplet, and D. Tarzia, *Decay of global solutions, stability and blowup for a reaction-diffusion problem with free boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 781–792.

[9] N. Kenmochi, *Two-phase Stefan problems with nonlinear boundary conditions described by time-dependent subdifferentials*, Control Cybernet. **16** (1987), 7–31 (1988) (English, with Russian and Polish summaries).

[10] ______, *Global existence of solutions of two-phase Stefan problems with nonlinear flux conditions described by time-dependent subdifferentials*, Control Cybernet. **19** (1990), no. 1-2, 7–39 (English, with Russian and Polish summaries). MR1166227

[11] ______, *A new proof of the uniqueness of solutions to two-phase Stefan problems for nonlinear parabolic equations*, Free boundary value problems (Oberwolfach, 1989), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 95, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 101–126.

[12] H. A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + \mathcal{F}(u)$*, Arch. Rational Mech. Anal. **51** (1973), 371–386.

[13] P. Souplet, *Stability and continuous dependence of solutions of one-phase Stefan problems for semilinear parabolic equations*, Port. Math. (N.S.) **59** (2002), 315–323.